14/03/2017

Μάθημα 4ο
Απει4

Συνέχεια Ορισμού

$\int_A f = \int_A f(\vec{x})\,d\vec{x}$, όπου $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο

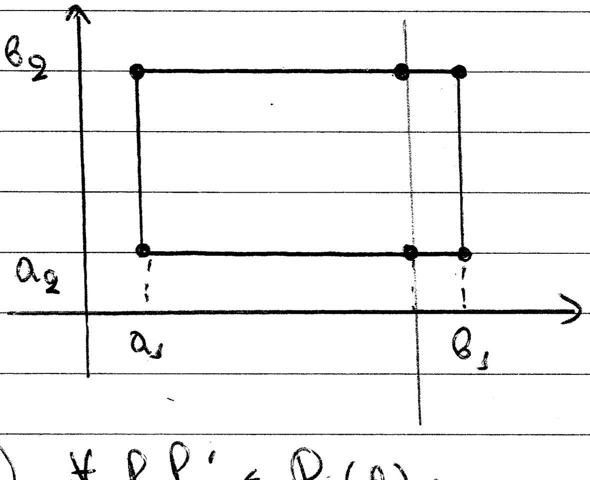
⊛ Κάτω και άνω άθροισμα για μία (τυχούσα) διαμέριση $P \in \mathcal{P}(A)$ με $L(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \inf f|_S \cdot V(S)$

! $L(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \underbrace{\inf f|_S \cdot V(S)}_{\geq \inf f} \leq U(f,P) := \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \underbrace{\sup f|_S \cdot V(S)}_{\leq \sup f}$

⊛ Δείξαμε ότι:

α) $\forall P \in \mathcal{P}(A)$:
$-\infty < \inf f \cdot V(A) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq \sup f \cdot V(A) < +\infty$

β) $\forall P, P' \in \mathcal{P}(A)$ με $P' \supset P$:
$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P)$



$\{\cdot\} = P\{(a_1,a_2),(a_1,b_2),(b_1,a_2)(b_1,b_2)\}$ η απλούστερη (τετριμμένη) διαμέριση του A με κάτω άθροισμα $L(f,P_0) = \inf V(A)$ και με άνω άθροισμα: $U(f,P_0) = \sup f \cdot V(A)$

γ) $\forall P, P' \in \mathcal{P}(A)$:
$L(f,P') \leq U(f,P)$

Με λόγια (→ λόγος: μπλα, μπλα κ' σκέψη.):
(α) Πάντα το κάτω άθροισμα $\leq$ πάνω άθροισμα
για ίδια διαμέριση
(β) Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μεγαλύτερο κάτω άθροισμα
κ' μικρότερο άνω άθροισμα
(γ) Πάντα, το κάτω άθροισμα $\leq$ άνω άθροισμα ακόμα και για
διαφορετικές διαμερίσεις

Πόρισμα

Από τα (α) έχουμε ότι τα σύνολα $\{L(f,P),\ P\in\mathcal{P}(A)\}$ και $\{U(f,P),\ P\in\mathcal{P}(A)\}$ είναι φραγμένα $\Rightarrow$
$\exists\ L_f := \sup\{L(f,P) : P\in\mathcal{P}(A)\}$ κάτω ολοκλήρωμα
$U_f := \inf\{U(f,P) : P\in\mathcal{P}(A)\}$ άνω ολοκλήρωμα
και ισχύει πάντα: $L_f \leq U_f$

Απόδειξη

Από το (γ). Έστω $P\in\mathcal{P}(A)$. Τότε $\forall P'\in\mathcal{P}(A)$:
$L(f,P') \leq U(f,P) \Rightarrow L_f \leq U(f,P) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall P\in\mathcal{P}(A) : L_f \leq U_f$

Ορισμός: Αν $L_f = U_f$, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $L_f = U_f =: \int_A f =: \int_A f(\bar{x})\,d\bar{x}$ και ονομάζεται

ολοκλήρωμα της f
(όπου $f: A\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο)

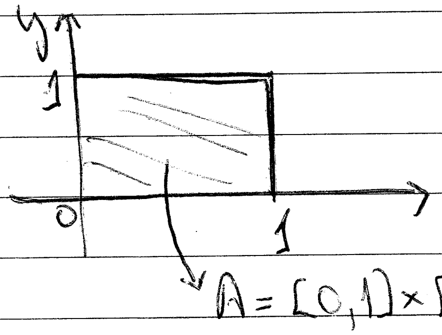
Παράδειγμα 1: Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f(\bar{x}) = c\in\mathbb{R},\ \forall\bar{x}\in A$
$$L(f,P) = \sum_{S\in\mathcal{S}_P} \underbrace{\inf f|_S}_{=c} \cdot V(S) = c\cdot V(A)$$

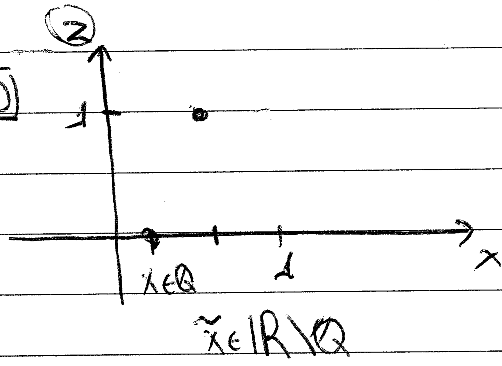
$$U(f,P) = \sum_{S\in\mathcal{S}_P} \underbrace{\sup f|_S}_{=c}\cdot V(S) = c\cdot V(A)$$

$$\Rightarrow L_f = c \cdot V(A) = U_f =: \int_A f$$

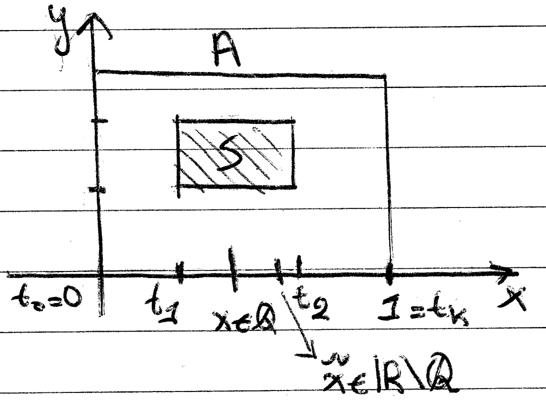
Παράδειγμα 2

Έστω $f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$





Αφού για κάθε διαμέριση $P \in \mathcal{P}(A)$ του $[0,1]\times[0,1] = P$ έχουμε $P = P_1 \times P_2$ και P_1 διαμέριση του $[0,1]$ στον άξονα του x με $P_1 = \{0, t_1, t_2, \ldots, t_k = 1\}$ και $t_{i-1} < t_i$ υπάρχει σε κάθε ορθογώνιο S του A για την P ένα σημείο (x_1, y_1) του S με $f(x_1, y_1) = 0$ (όπου $x_1 \in \mathbb{Q}$) και ένα σημείο $(x_2, y_2) \in S$ με $f(x_2, y_2) = 1$ (όπου $x_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)



$$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}(A) \ \forall S \in \mathcal{S}_P : \inf f|_S = 0$$
$$\sup f|_S = 1$$

$$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}(A) : L(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \underbrace{\inf f|_S}_{0} V(S) = 0$$

$U(f,P) = \sum_{S \in S_P} \underbrace{\sup f|_S}_{=1} \cdot V(S) = V(A) = 1$.

$\Rightarrow L_f = 0 \underset{\neq}{<} 1 = U_f \Rightarrow$ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Riemann («απλό μορφή»)
Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε:
f ολοκληρώσιμη $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(A): U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Απόδειξη.
($\Rightarrow$): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού f ολοκληρώσιμη $\exists L_f, U_f \in \mathbb{R}$ με
$\boxed{L_f = U_f}$ (1) όπου $L_f = \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}(A)\}$
$U_f = \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}(A)\}$

$\Rightarrow \exists P' \in \mathcal{P}(A) : U(f,P') < U_f + \varepsilon/2$
Επίσης: $\exists P'' \in \mathcal{P}(A) : L(f,P'') > L_f - \varepsilon/2$ (2)

$\Rightarrow$ Για P κοινή διαμέριση των P', P'' έχουμε:

$\underbrace{U(f,P)}_{\leq U(f,P')} - \underbrace{L(f,P)}_{\geq L(f,P'')} \Rightarrow U(f,P) - L(f,P) \leq$
$\leq U(f,P') - L(f,P'') \overset{(2)}{<}$
$< U_f + \varepsilon/2 - L_f + \varepsilon/2 \overset{(1)}{=}$
$< \varepsilon$

Συνεπώς πράγματι $\exists P \in \mathcal{P}(A) : U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

($\Leftarrow$) Πάντα έχουμε $L_f \leq U_f$ και επίσης $L_f \geq L(f,P)$ και
$U_f \leq U(f,P) \ \forall P \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq U_f - L_f \leq U(f,P) - L(f,P) \quad \forall P \in \mathcal{P}(A)$
Από την υπόθεση (στο δεξιά) έχουμε ότι:
$\forall \varepsilon > 0 \ \in P_\varepsilon \in \mathcal{P}(A)$ με: $0 \leq U_f - L_f \leq \underbrace{\left[U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)\right]}_{(1)} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq U_f - L_f < \varepsilon$
(όπου τα U_f, L_f δεν εξαρτώνται από κανένα $P \in \mathcal{P}(A)$

γιατί ακριβώς έτσι τα inf, sup μετά από ισαίρνσn> σαίνω από όλο το P)

$\Longrightarrow \quad U_f = L_f$

Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Riemann («ειδικότερη μορφή»)
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε:
f ολοκλ. $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathcal{P}(A)$ με $\|P\| < \delta$.

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

<u>Απόδειξη.</u> (Βλ., αν θες, Σημειώσεις Γιαννούλη - e-book)

▶ Με χρήση αυτού του κριτηρίου αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα Riemann μπορεί να οριστεί <u>ισοδύναμα</u> και ως:

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f λέγεται <u>ολοκληρώσιμη</u> αν $\exists\, a \in \mathbb{R}$ (το ολοκλήρωμα της f, $a =: \int_A f$) έτσι ώστε:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(A)$ με $\|P\| < \delta$ και κάθε σημείο $\vec{\xi}_S \in S$, όπου $S \in \mathcal{S}_P$, ισχύει:

$$\Big| \underbrace{\sum_{S \in \mathcal{S}_P} f(\vec{\xi}_S) \cdot V(S)}_{\text{άθροισμα Riemann}} - a \Big| < \varepsilon$$

Από την «απλή μορφή» του Κριτηρίου Riemann και τους ορισμούς προκύπτουν οι βασικές ιδιότητες του $\int_A f$, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και f, g ολοκλ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f+g$, af $(a \in \mathbb{R})$ και $f \cdot g$, $|f|$ ολοκληρώσιμες με

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g, \quad \int_A (af) = a \int_A f$$

(Δεν υπάρχει τύπος (γενικά) για $\int_A (fg)$)

και $\int_A |f| \geq \left| \int_A f \right|$, όπου $|f|(\bar{x}) := |f(\bar{x})|$

$\boxed{\text{π.χ}}$ απόδειξη ότι af ολοκλ. και $\int_A (af) = a \int_A f$

$$\boxed{f \leq g \Rightarrow \int_A f \leq \int_A g}$$

$\Leftarrow$ $\forall \bar{x} \in A : f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$: $\forall P \in \mathcal{P}(A)$ $\forall S \in \mathcal{S}_P$, $\forall \bar{x} \in S$:

$\inf f/S \leq f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \Rightarrow \inf f/S \leq \inf g/S \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}(A)$ $L(f,P) = \sum_{S \in \mathcal{S}_P} \inf f/S \cdot V(S) \leq$

$\leq L(g,P) \leq L_g \Rightarrow \underset{\int_A f}{\underset{\|}{L_f}} = \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}(A)\} \leq \underset{\int_A g}{\underset{\|}{L_g}}$

Πόρισμα (του $f \leq g \xrightarrow{f,g \text{ ολοκλ.}} \int_A f \leq \int_A g$)

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Τότε: $\underbrace{\inf f \cdot V(A)}_{= \int_A h} \leq \int_A f \leq \underbrace{\sup f \, V(A)}_{= \int_A g}$ για $g(\bar{x}) = \sup f \in \mathbb{R}$

$\int_A h$, όπου $h(\bar{x}) = \inf f$ $\forall \bar{x} \in A$ με $h(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in A$

(όπου προφανώς $f(\bar{x}) \leq \sup f = g(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in A$)

Επιπλέον, βασική ιδιότητα: (« προσθετικότητα του πεδίου ολοκλ. »)

Έστω $A \in \mathbb{R}^2$ κλ. ορθογ., $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $P \in \mathcal{P}(A)$

Τότε: f ολοκλ. $\Leftrightarrow$ $f|_S$ ολοκλ. $\forall S \in S_P$ και

$$\int_A f = \sum_{S \in S_P} \int_S f|_S$$

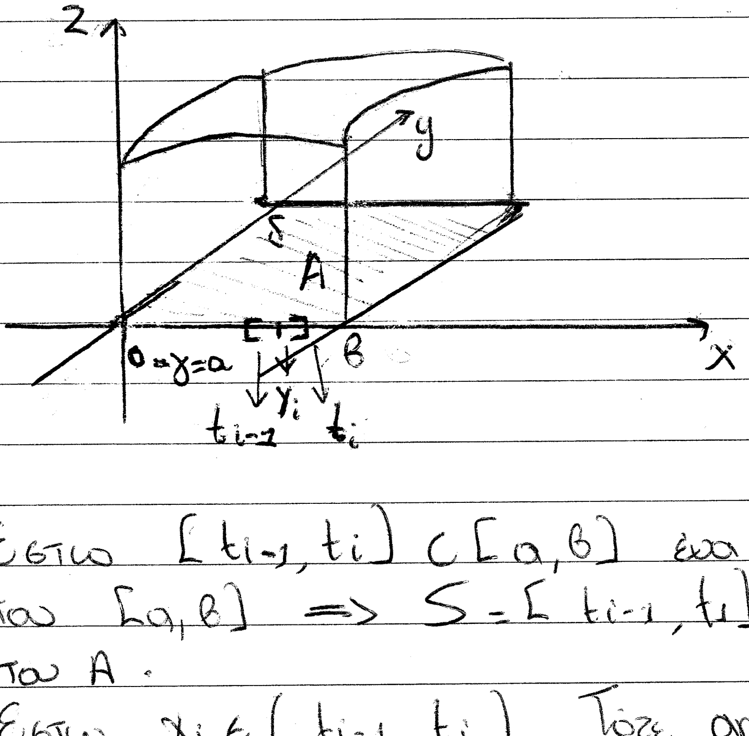
Θεωρητικά, αφού ξέρουμε τον ορισμό του ολοκλ. Riemann, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

Αφού όμως θα έπρεπε να υπολογίσουμε π.χ. το

$L_f = \sup \{ \underbrace{L(f,P) : P \in \mathcal{P}(A)}_{\text{υπεραριθμήσιμο σύνολο}} \}$, αυτό είναι εξαιρετικά περίπλοκο.

Ισχύει όμως τουλάχιστον διαισθητικά το εξής:

Έστω $n=2$ και $A = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ και μια $f: A \to \mathbb{R}$ όπως στο σχήμα



Έστω $[t_{i-1}, t_i] \subset [\alpha, \beta]$ ένα πολύ λεπτό υποδιάστημα του $[\alpha, \beta]$ $\Rightarrow$ $S = [t_{i-1}, t_i] \times [0,1]$ ένα υποορθογώνιο του A.

Έστω $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Τότε από ΑΠΕΘ ΙΙ υπολογίζω $\int_\gamma^\delta f(x_i, y)\,dy$

Αν $[t_{i-1}, t_i]$ πολύ λεπτό $\Rightarrow$ (~) η $f: [t_{i-1}, t_i] \times [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ σταθερή $\Rightarrow$ (~) ο όγκος κάτω από την f και πάνω από τη λωρίδα S θα γίνει ,

$$\int_{\underbrace{[t_{i-1},t_i]\times[\gamma,\delta)}_{S}} f(x,y)\,d(x,y) \approx (t_i - t_{i-1}) \int_\gamma^\delta f(x_i,y)\,dy$$

$$\Rightarrow \int_A f \approx \sum_{i=1}^{k} \left(\int_\gamma^\delta f(x_i,y)\,dy\,(t_i - t_{i-1}) \right)$$ όπου έχουμε

«κόψει» το $[\alpha,\beta]$ σε πολλά μικρές τέτοιες λωρίδες.

Θεωρώντας την απεικόνιση $x \mapsto \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \xRightarrow{\text{αθρ. Riemann}}$

$$\int_A f \approx \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right) dx$$

Υπολογίστε τα ολοκλ. που δίνονται στην σελ 114 με αυτόν τον τρόπο.